MA2: Examen Math L1 MASS du 12/5/2014
12h-15h, 226C - 227C - 4C

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits et doivent être rangés.

Exercice I: ($\sim 8pts$)

Dans cet exercice on notera $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x, y, z) = (2x, 2x + y - z, -2x + y + 3z).$$

Donnez la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.

2) a) Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ ne soit pas bijective, et déterminez cette valeur λ.

b) Donnez une équation de $H = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ puis une base $\mathcal{N}$ de H.

3) a) Le vecteur $u_2 = e_3 - e_2$ est il dans l'image de $f - 2 \cdot \mathrm{Id}$?

b) La famille $\mathcal{N}, u_2$ est elle libre?

4) On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, et $u_3 = e_3$.

a) Montrez que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

5) a) Calculez $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.

b) Quelle est la matrice $C = Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

6) a) Donnez une expression de A^n en fonction de C et de P.

b) Calculez C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice II: ($\sim 2pts$)

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que v_1, v_2 est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

2) On considère une application linéaire s de matrice dans la base $\mathcal{B}'$:

$$Mat(s, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donnez la matrice de s dans la base canonique (au départ et à l'arrivée).

Exercice III: ($\sim 2pts$)

On se donne un espace vectoriel E de dimension 5 et g une application linéaire de E dans E dont le noyau est de dimension 2.

1) Quel est le rang de g?

2) Montrer que $g \circ g$ n'est pas l'application nulle.

Exercice IV: ($\sim 3.5pts$)

1) a) Donnez le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$f(x) = e^{\sin(x)} + \ln(1 - x) + \frac{5x^3}{6} - 1$$

b) Donnez le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$g(x) = (1 - \cos(x)) \cdot \ln(1 + x).$$

c) Etudiez le signe de $f-g$ au voisinage de $x=0$.

2) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale suivante est elle convergente en 0?

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x^n \cdot \sqrt{x}} \cdot dx$$

Exercice V: ($\sim 2pts$)

1) Calculez

$$\int_0^1 x \cdot \arctan(x) \cdot dx$$

2) Calculez par changements de variables

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \sin(x^2) \cos^2(x^2) \cdot dx$$

Exercice VI: ($\sim 1pts$, *Question de cours)*

Enoncez la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 6 pour la fonction sin.

Exercice VII: ($\sim 5pts$)

On considère un réel a et les fonctions:

$$\begin{cases} x(t) & = & \frac{\sin(t)}{1-t} \\ y(t) & = & \frac{e^t}{1-t+a\cdot t^2} \end{cases}$$

1) a) Donnez un développement limité autour de $t=0$ à l'ordre 3 de $x(t)$.

b) Montrer qu'il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que:

$$y(t) = 1 + 2t + (\frac{5}{2} - a) \cdot t^2 + (\frac{8}{3} - 3a) \cdot t^3 + t^3 \cdot \epsilon(t)$$

2) On considère la courbe paramétré $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$.

a) Lorsque a vaut 1, la courbe Γ a-t-elle un point critique en $t=0$? Donnez un vecteur directeur de la tangente à Γ en $t=0$ et la position de cette courbe par rapport à cette droite.

b) Trouvez une valeur de a telle que le point $\Gamma(0)$ soit un point d'inflexion de Γ.

3) On considère maintenant le cas $a=0$ et la courbe $C(t) = (x(t^2), t^5 + y(t^2))$.

a) Le point $C(0)$ est il singulier?

b) Faites l'étude locale de C autour du paramètre $t=0$.

Exercice VIII: ($\sim 4.5pts$)

1) Donnez une primitive de:

$$F = \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

2) a) Sans effectuer les calculs, donnez la forme de la décomposition en éléments simples de:

$$Q = \frac{x^2+2}{x^4 \cdot (x+1) \cdot (x^2-x+1)}$$

b) Calculez les numérateurs des éléments simples de cette décomposition dont le dénominateur n'est pas du type $(x^2-x+1)^n$.

c) En calculant $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot Q(x))$ et $Q(1)$, déterminez les coefficients qui vous manquent, et donnez la décomposition en éléments simples de Q.